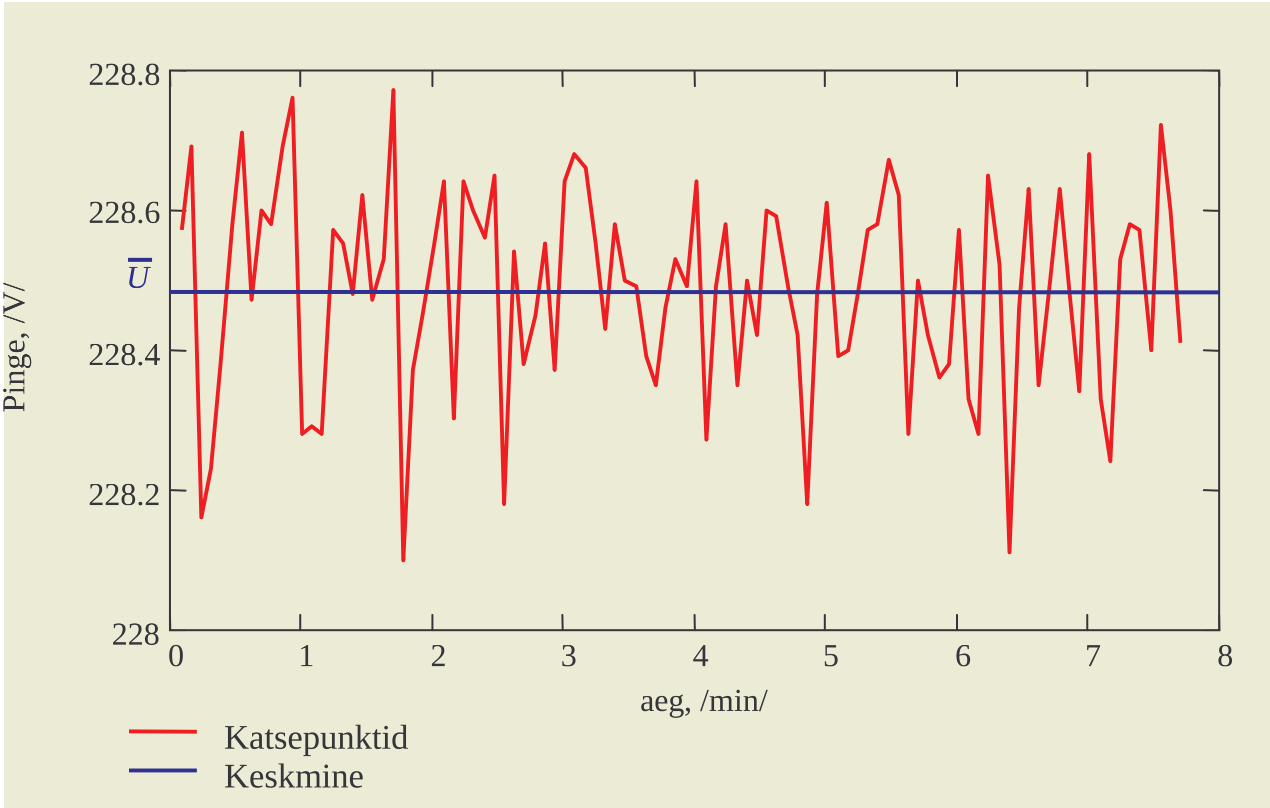
3. Mõõtetulemus kui juhuslik suurus

Juhuslik suurus on suurus, mis sõltub juhuslikust sündmusest ja mille väärtust pole enne juhusliku sündmuse toimumist võimalik kindlaks määrata. Näiteks täringu viske puhul ei tea me kunagi täpselt ette, mitu silma saame. Nii on täringuviske resultaat juhuslik suurus. Tingituna juhuvigadest on ka üksikmõõtmise tulemus juhuslik suurus.

Näide 1.
Oletame, et mõõtsime multimeetriga füüsikahoones 8 minuti jooksul $n = 100$ korda vahelduvpinget. Katsetulemuste jaotus on kujutatud joonisel 2. Näeme, et vahelduvpinge väärtus ei ole ajas konstantne vaid fluktueerub mingi väärtuse ümber, s.t on juhuslik suurus. Antud näites on selle põhjuseks nii juhuvead kui ka vahelduvpinge väärtuse sõltuvus kogu võrgus tarbitavast võimsusest.



Joonis 2. Võrgupinge muutumine ajas.

Mõõtetulemus on reaalse katse tulemus. Mõõtetulemuste kogum annab informatsiooni mõõdetud suuruse võimalike väärtuste tõenäosuslikust jaotusest. Sellises käsitluses on mõõteväärtus nagu koordinaat, millega pannakse paika mõõtetulemusele omistatavate väärtuste kese arvteljel. Hinnatava füüsikalise suuruse iseloomustamiseks võime enamasti kasutada aritmeetilist keskväärtust. Oletame et me mõõtsime suuruse X väärtuse n korda, siis **aritmeetiline keskväärtus** avaldub valemiga

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

kus x_i on üksikmõõtmiste tulemused.

Üksikmõõtmiste tulemused erinevad keskväärtusest. Neid erinevusi $\Delta^{o}x = x_i - \bar{x}_i$ nimetatakse hälveteks.

3.1. Histogramm

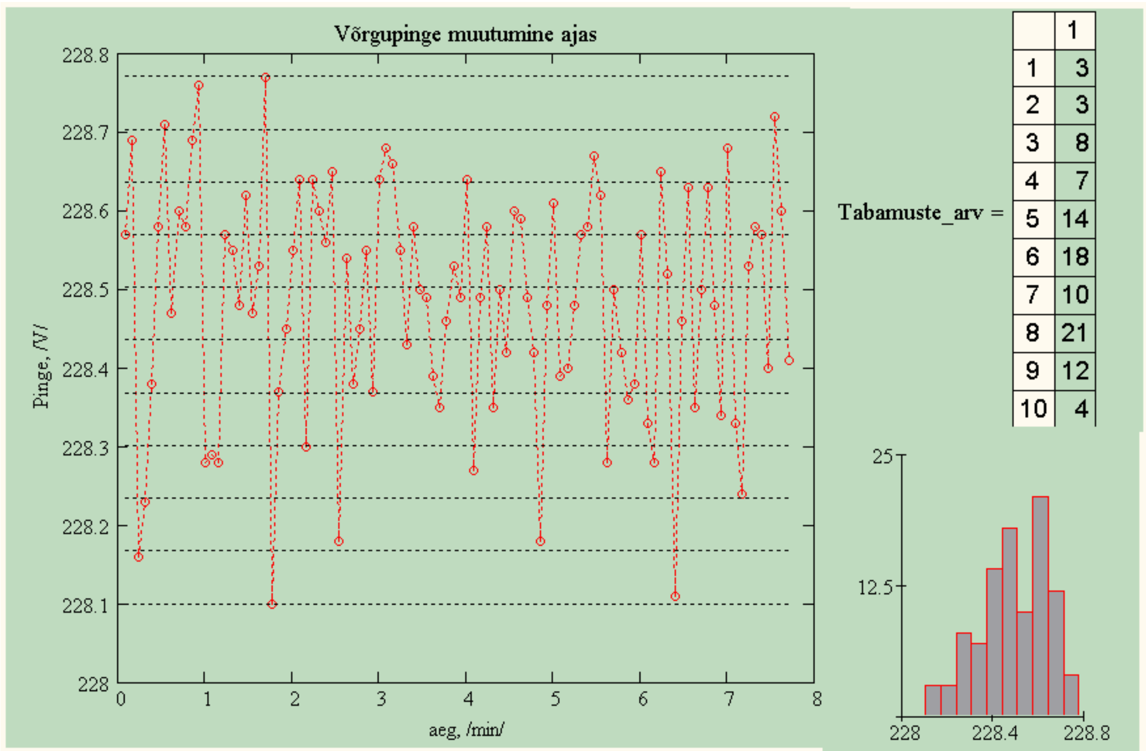
Mõõtetulemuste e mõõdiste jaotumist keskväärtuse ümber saab kirjeldada histogrammiga. Histogramm on tulpdiagramm, mis näitab, kui sageli esinevad ühed või teised tulemused. Histogrammi ehitamiseks peame kogu mõõtetulemuste esinemise vahemiku jagama võrdseteks lõikudeks Δx. Vahemike arv valitakse tavaliselt ligikaudu võrdseks ruutjuurega mõõtmiste arvust. Seejärel loendame, mitu korda mõõdetav suurus satub igasse lõiku ja joonistame iga lõigu kohale tabamuste arvuga võrdelise tulba.

Näide 2.
Histogrammi ehitamine. Tuleme tagasi vahelduvpinge mõõtmise näite juurde (joonis 2). Oma katses saime 100 lugemit, millest vähim oli $E_{min} = 228{,}10$ V ja suurim $E_{max} = 228{,}77$. Jagame mõõtetulemuste vahemiku $E_{min} \ldots E_{max}$ $\sqrt{100} = 10$ lõiguks, seejärel loendame, mitu korda mõõtetulemus igasse lõiku sattus. Tulemused on esitatud tabelis 5.

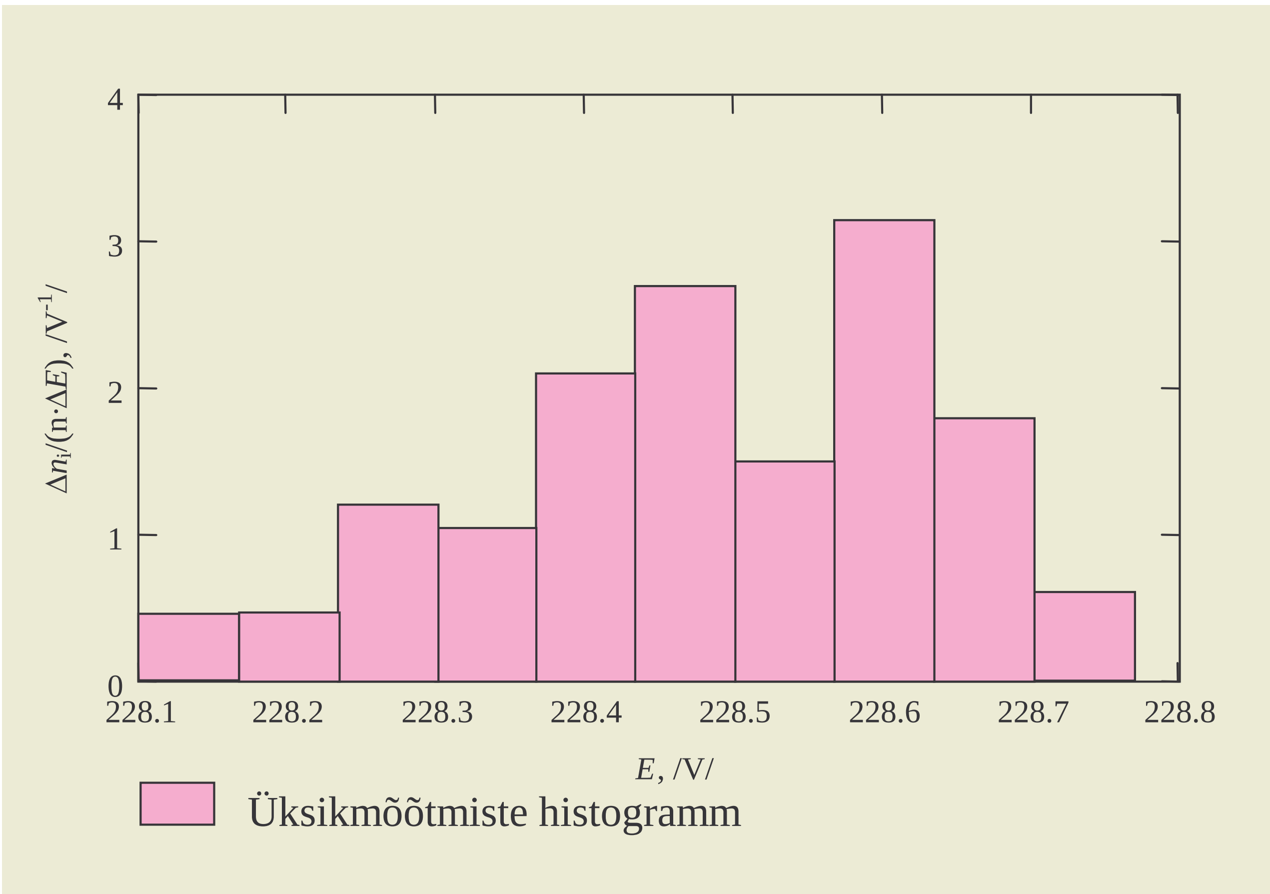
Tabel 5. Loendustabel histogrammi joonistamiseks

Jrk	Lõikude rajaväärtused [V]		Δn_i
1	228.100	228.167	3
2	228.167	228.234	3
3	228.234	228.301	8
4	228.301	228.368	7
5	228.368	228.435	14
6	228.435	228.502	18
7	228.502	228.569	10
8	228.569	228.636	21
9	228.636	228.703	12
10	228.703	228.770	4

Tabeli alusel joonistame histogrammi (joonis 3). Histogrammi rõhtteljele kantakse mõõtetulemuste vahemike ΔE_i otspunktidele (või keskpunktidele) vastavad väärtused. püstteljele kantakse suurused $\Delta n_i /(n \cdot \Delta E)$, kus Δn_i on mõõtmiste arv, mis satub lõikku ΔE_i. Selliselt valitud ühikute kasutamisel on histogrammi alune pindala võrdne ühega (joonis 4).



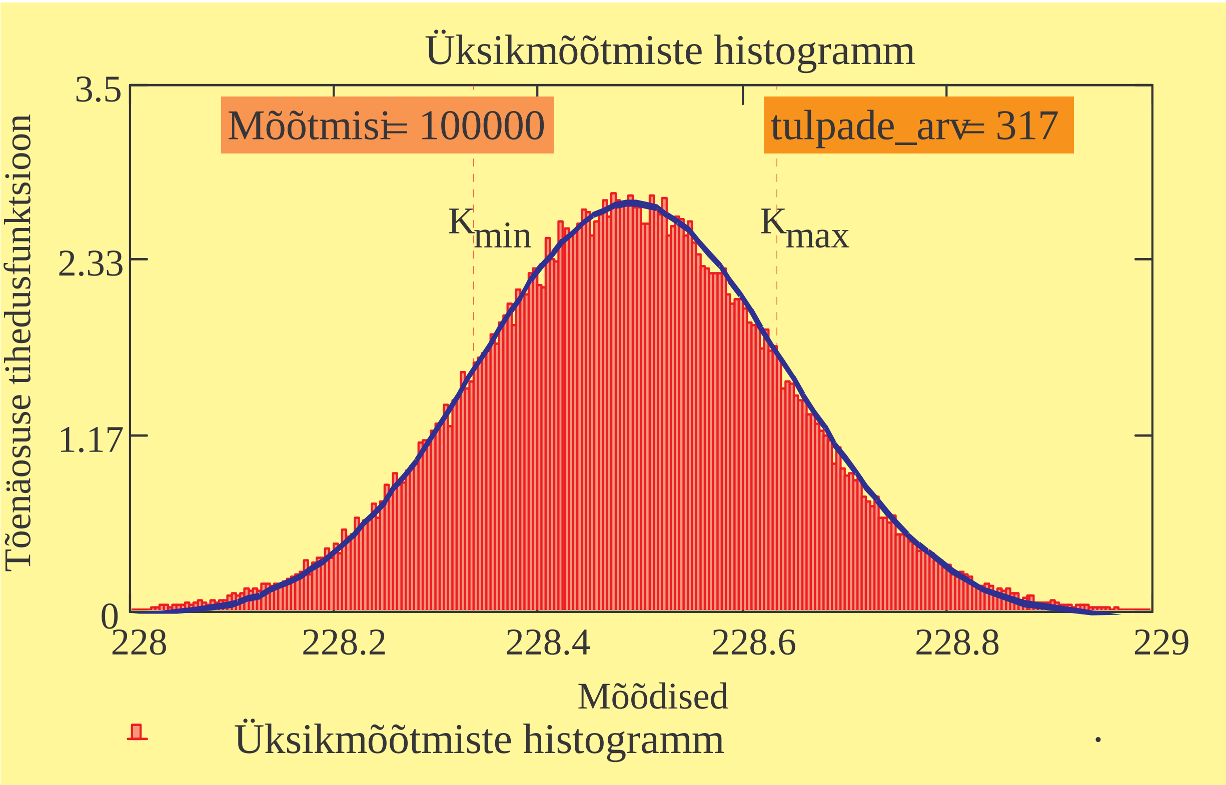
Joonis 3. Histogrammi ehitamine.



Joonis 4. Histogrammi näide.

Mõõtmiste arvu suurendades ja samal ajal vahemiku laiust vähendades (joonis 5) sulavad piirjuhul tulpade tippud siledaks kõveraks $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0, n \to \infty} \frac{\Delta n_i}{n \cdot \Delta x_i}$.

Saadud kõverat $f(x)$ nimetatakse **tõenäosuse tihedusfunktsiooniks** (joonis 5 sinine joon)**.**



Joonis 5. Tõenäosuse tihedusfunktsioon on tähistatud sinise joonega.

3.2. Dispersioon ja standardhälve

Mõõtetulemuste hajumist iseloomustab parameeter mida kutsutakse **dispersiooniks**:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_t)^2}{n},$$

kus x_t on mõõdetava suuruse tõeline väärtus.

Selle parameetri puuduseks on tema dimensioon – suuruse dispersiooni dimensiooniks on suuruse enda dimensioon ruudus. Näeme, et suurust ja tema dispersiooni on väga ebamugav võrrelda. Seetõttu kasutatakse mõõtmisteoorias mõõdiste hajumise iseloomustajana positiivset ruutjuurt dispersioonist – standardhälvet.

Mõõtmiste suure arvu korral saab suuruse σ_x ehk **standardhälbe** (ruutkeskmine hälve vanemas kirjanduses) leida valemist

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_t)^2}{n}}.$$

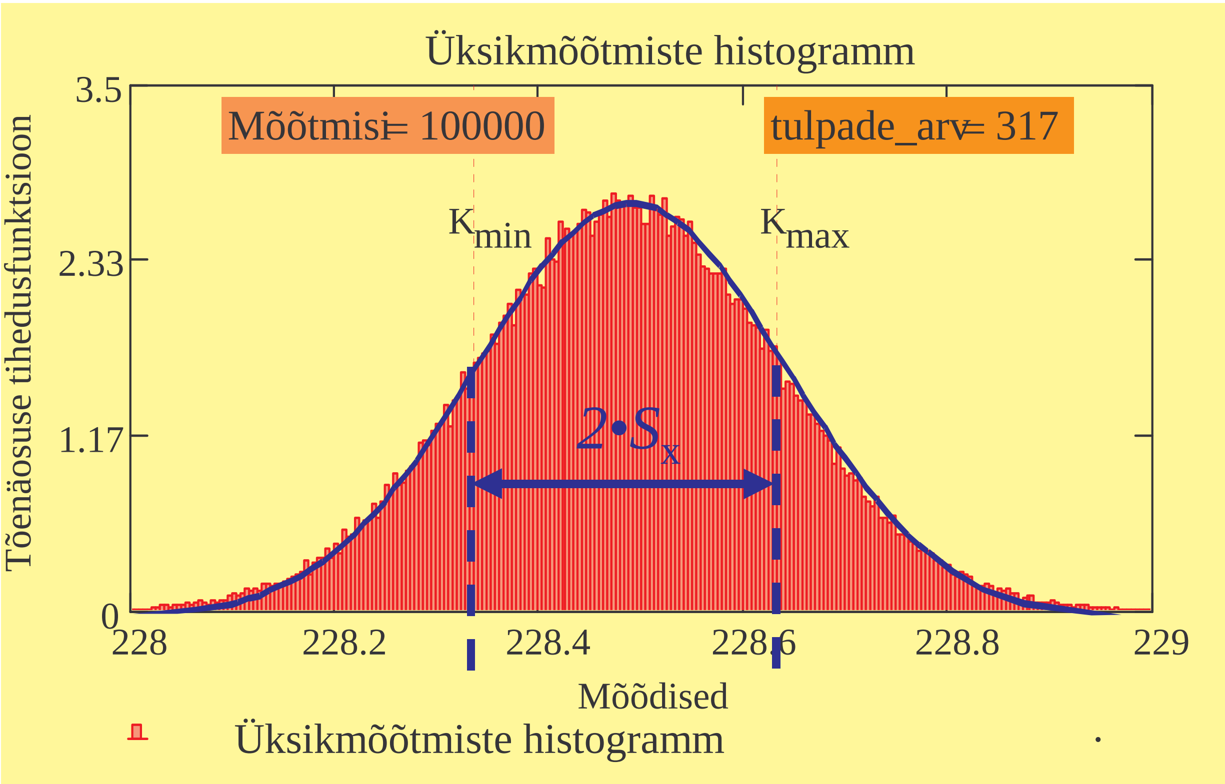
Praktikas pole mõõtmiste arv tavaliselt väga suur, samuti pole teada mõõdetava suuruse tõelist väärtust. Seetõttu kasutatakse standardhälbe ligikaudse hinnanguna **eksperimentaalset standardhälvet:**

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}\,.$$

Oluline on märkida, et üksikmõõtmiste eksperimentaalne standardhälve peaaegu ei sõltu mõõtmiste arvust (vaata eelmist valemit!), ta iseloomustab mõõtmismeetodi täpsust.

Üksikmõõtmiste standardhälbe ulatus võrrelduna jaotusfunktsiooni laiusega on näha joonisel 6. Matemaatiline standardhälve on piirjuht eksperimentaalsest standardhälbest:

$$\sigma_x = \lim_{n\to\infty} s_x$$



Joonis 6. Üksikmõõtmiste standardhälve.

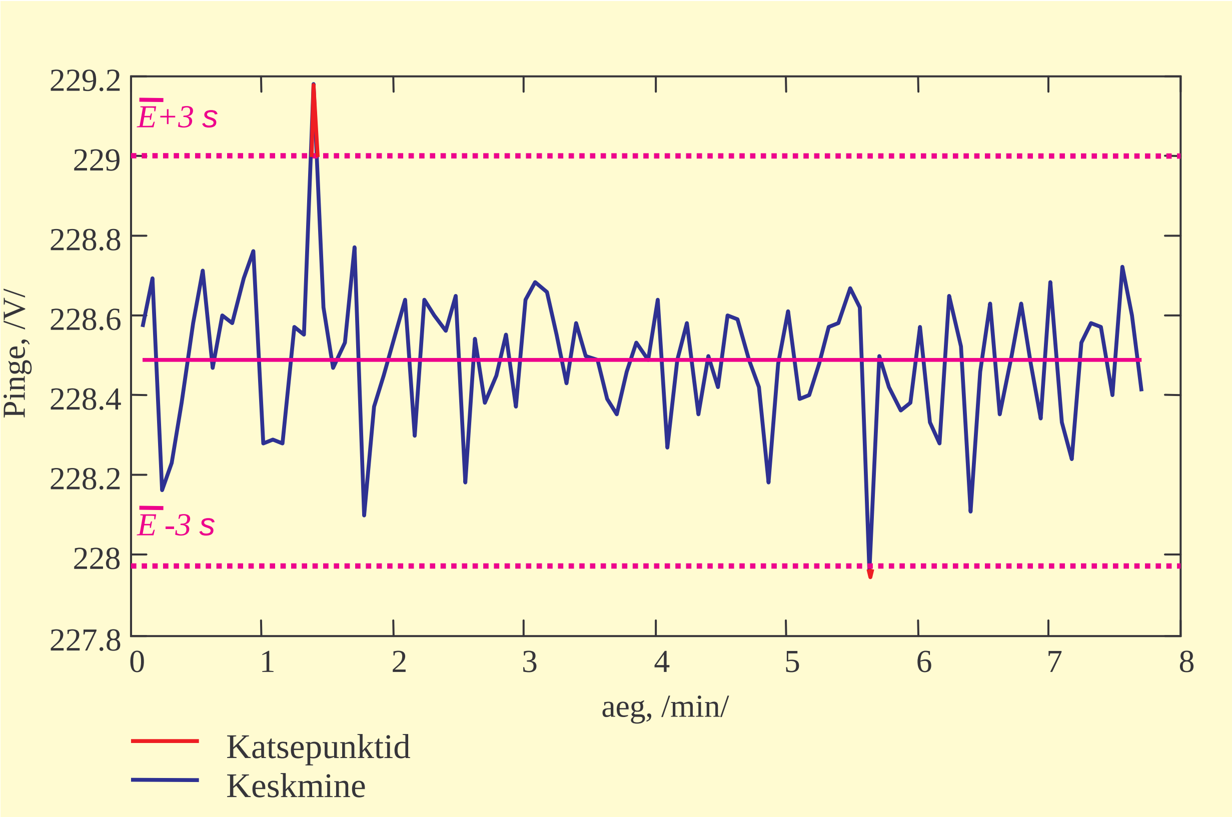
3.3. Ekse

Mõnikord juhtub, et mõõtetulemuste hulka satub ilmselgelt **vale mõõdis** ehk **ekse**.

Kuidas ekset ära tunda? Vaatame järgmist näidet. Oletame, et saime võrgupinge mõõtmisel sellise tulemuse nagu on näidatud joonisel 7. Lisame sellele joonisele kaks visiirjoont, kohtadel $\bar{E} - 3s_E$ ja $\bar{E} + 3s_E$. Kõik mõõtetulemused, mis jäävad nende kahe visiirjoonega piiratud alast väljapoole, võib lugeda ekseteks.

Antud näites on meil kaks ekset:

- E = 229.18 V (sest $E > \overline{E} + 3s_{\mathrm{E}}$);
- E = 227.96 V (sest $E < \overline{E} - 3s_{\mathrm{E}}$).



Joonis 7. Võrgupinge muutumine ajas, ekse.

Ekse on põhjustatud mõõtja hooletusest, tähelepanematusest või mõnikord ka digitaalset mõõtesüsteemi mõjustanud häirest. Selline jämeda veaga tulemus tuleb edasisest andmetöötlusest kõrvaldada, lisades asjakohase märkuse mõõtmiste protokolli.

3.4. Aritmeetilise keskmise standardhälve ja A–tüüpi määramatus

Siiani rääkisime, et üksikmõõtmise tulemus on juhuslik suurus. Samamoodi on juhuslik suurus ka juhuslike suuruste aritmeetiline keskmine. Näiteks kui on tehtud N mõõteseeriat, igaühes n mõõtmist, ja leitud kõik N keskväärtust $\overline{x}_j$, siis seeriate aritmeetilise keskmise standardhälbe saab leida valemist

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{x_i} - x_t)^2}{N}}$$

Matemaatilises statistikas näidatakse, et $\sigma_{\bar{x}}$ ja σ_x on seotud valemiga

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Analoogiliselt on seotud omavahel aritmeetilise keskmise standardhälbe hinnang ja mõõdise eksperimentaalne standardhälve. Saadud tulemus lubab hinnata aritmeetilise keskmise erinevust tõelisest väärtusest ka üheainsa seeria põhjal, mis koosneb n mõõtmisest:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

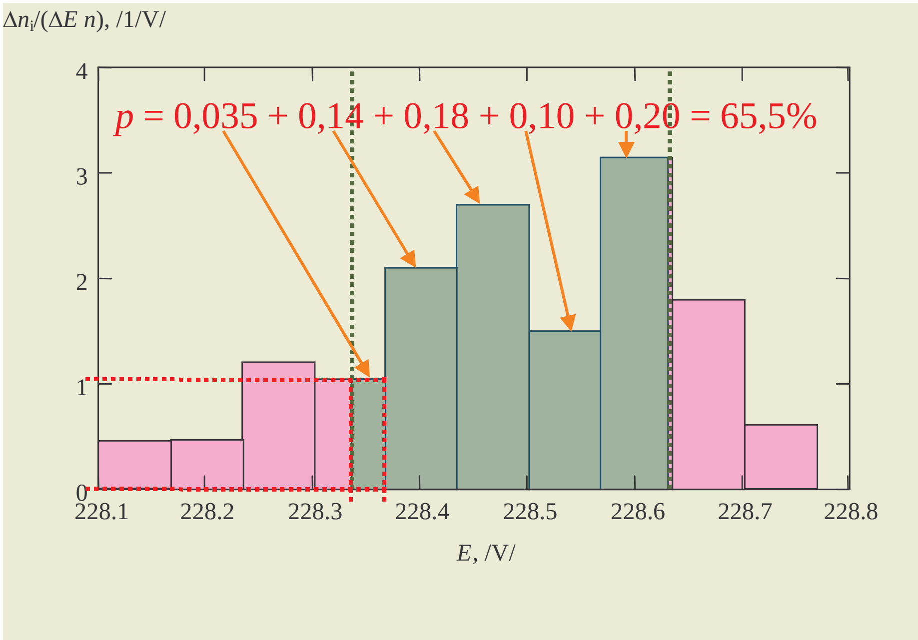
Kuna suurus $s_{\bar{x}}$ on võrdeline $\frac{1}{\sqrt{n}}$, siis saab teda vähendada mõõtmiste arvu suurendades.

Eespool nägime, et mõõdetava suuruse hinnanguna kasutatakse enamasti aritmeetilist keskmist. Selle keskmise hindamise täpsust iseloomustab keskmise standardhälve, mis valitaksegi määramatuse statistilise komponendi – A-tüüpi määramatuse – väärtuseks.

$$u_A(x) = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

3.5. Usaldusnivoo leidmine histogrammi alusel

Tõenäosust tulemuse sattumiseks mingisse vahemikku saab hinnata, kui mõõta histogrammi alune pindala (graafiku ühikutes!) selle vahemiku ulatuses. Seda protseduuri illustreerib keskväärtusest ühe standardhälbe kaugusele jäävate tulemuste tõenäosuse leidmise näite varal joonis 8. Histogrammi roheliseks värvitud osa pindalaks saame 0,655, mis tähendab, et tulemuse sellesse vahemikku sattumise tõenäosus on 65,5%.



Joonis 8. Usaldusnivoo hindamine histogrammi aluse pindala mõõtmise teel.